CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES 1979

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (annulée)

DURÉE : 4 heures

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

I

1° Soit l'équation : (E) $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ où α et β sont deux nombres réels donnés.

On rappelle que l'ensemble des solutions de E sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

En cherchant des solutions particulières du type x^r, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation (E) dans les 3 cas suivants :

a. $\alpha = 3$ et $\beta = -3$.

b. $\alpha = 3$ et $\beta = 1$. On fera le changement de fonction $y = zy_0$ où y_0 est une solution particulière de (E).

c. Lorsque $r = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose, pour $x \in]0, +\infty[$: $x^r = x^a e^{ib \operatorname{Log} x}$. Vérifier que la dérivée de $(x \longmapsto x^r)$ est rx^{r-1}.

Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 5$.

2° Soit l'équation (E_1) : $f'(x) = f\left(\frac{a}{x}\right)$ où $a > 0$.

a. On appelle solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$, toute fonction réelle de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telle que la relation (E_1) soit vraie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Prouver que si f est solution de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, alors f est de classe C^∞. Prouver que f est solution de (E_1), si et seulement si :

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad f''(x) = -\left(\frac{a}{x^2}\right) f(x) \quad \text{et} \quad f'(1) = f(a).$$

b. Donner l'ensemble des solutions réelles de (E_1) sur $]0, +\infty[$, dans le cas : $a = \frac{3}{16}$.

c. On se place dans le cas : $a = \frac{1}{2}$.

Prouver que les solutions f de (E_1) sont déterminées par deux constantes réelles R et φ, sous la forme :

$$f(x) = R\sqrt{x} \cos[\theta(x) + \varphi]$$

où $\theta(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} x$ et φ telle que $f'(1) = f(a)$.

Donner l'ensemble des solutions dans ce cas.

3° On se place dans le cas : $a = \frac{1}{2}$.

Soit f une solution de (E_1) et $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5\pi}{4}}$.

a. Calculer $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$.

b. $\int_0^{x_0} f(t)\, dt$ et $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\, dt$ sont-elles convergentes? On justifiera la réponse.

II

Étude de l'équation (E_2) : $f'(x) = f(ax + b)$ où $a > 1$ et b réel quelconque.

On dit qu'une fonction f de classe C^1 sur un intervalle J est solution de E_2 sur J si et seulement si :

- f est définie sur la réunion de J et J' image de J par l'application $t \longmapsto at + b$;
- et la relation (E_2) est vraie pour tout $x \in J$.

1° On définit la suite (x_n) de nombres réels par x_0 réel donné et par $x_n = ax_{n+1} + b$ où $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$.

Prouver que la suite (x_n) converge vers une limite l que l'on calculera en fonction de a et b.

. . . /. . .

2° On donne $x_0 < l$ et φ une fonction numérique continue sur $[x_0, x_1]$, on définit une suite de fonctions (f_n) par :

$$f_0 = \varphi \text{ et } \forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}], \quad f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + \int_{x_n}^{x} f_{n-1}\,(at+b)\,dt.$$

a. Prouver : $\forall n \geqslant 1$, f_n est dérivable sur $]x_n, x_{n+1}[$ et admet une dérivée à droite en x_n et à gauche en x_{n+1}.

b. On considère la fonction f définie sur $[x_0, l[$ par :

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}[, \quad f(x) = f_n(x).$$

Prouver que f est continue sur $[x_0, l[$ et dérivable sur $]x_1, l[$.

c. Prouver que f est solution de (E_2) sur $]x_1, l[$ et que c'est l'unique solution de (E_2) qui coïncide avec φ sur $[x_0, x_1]$.

3° On suppose de plus φ à valeurs positives ou nulles sur $[x_0, x_1]$, (on a toujours $x_0 < l$), et on pose :

$$M = \operatorname*{Sup}_{[x_0, x_1]} |\varphi|$$

a. Prouver que f_n admet pour majorant sur $[x_n, x_{n+1}]$:

$$M_n = M(1 + x_2 - x_1) \ \ldots \ (1 + x_{n+1} - x_n).$$

b. Vérifier : $M_n < Me^{l - x_1}$ et prouver que f peut être prolongée par continuité en l.

c. Démontrer que l'on a encore ce dernier résultat si φ n'est pas supposée de signe constant sur $[x_0, x_1]$.

4° Soit $\mathcal{C}(x_0, x_1)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[x_0, x_1]$ muni de la norme de la convergence uniforme : $\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{[x_0, x_1]} |\varphi|$ et $\mathcal{C}(x_1, l)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[x_1, l]$ muni de la norme analogue : $\|f\| = \operatorname*{Sup}_{[x_1, l]} |f|$.

Soit L l'application qui à $\varphi \in \mathcal{C}(x_0, x_1)$ associe $f \in \mathcal{C}(x_1, l)$, la solution de (E_2), prolongée par continuité en l et qui coïncide avec φ sur $[x_0, x_1]$.

a. Prouver que L est linéaire. Est-elle continue ?

b. L est-elle injective ? Surjective ?

III

Étude de l'équation (E_3) : $f'(x) = f(x+b)$ où $b > 0$.

On dit que f de classe C^1 sur un intervalle J est solution de E_3 sur J si et seulement si :

- **f est définie sur la réunion J et J' image de J par l'application $t \longmapsto t + b$;**
- **et la relation (E_3) est vraie pour tout $x \in J$.**

1° *a.* Discuter, selon b, le nombre de solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$, du type e^{rx} où $r \in \mathbb{R}$. (On pourra s'aider d'un graphique).

b. Pour $b = \dfrac{1}{e}$, prouver que parmi les solutions, il y a les deux fonctions :

$$x \longmapsto e^{r_0 x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto xe^{r_0 x}.$$

2° Pour quelles valeurs de b existe-t-il des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, de la forme $e^{i\omega x}$ où $\omega \in \mathbb{R}$? Donner les fonctions réelles, combinaisons linéaires de ces solutions.

3° *a.* Montrer que l'on peut construire, par une méthode analogue à celle du § II, des solutions de (E_3), à partir d'une fonction φ donnée continue sur $[0, b]$.

b. On suppose que φ est de classe C^p (dérivée d'ordre p continue) sur $[0, b]$ telle que :

$$\forall k \in [1, p], \quad \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k-1)}(b) \text{ avec la convention } \varphi^{(0)} = \varphi.$$

Donner le plus grand intervalle possible de $\mathbb{R}$, sur lequel on peut définir une solution de (E_3) qui coïncide avec φ sur $[0, b]$. Ce résultat est-il en accord avec les solutions vues au § 1 et au § 2 de cette partie ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail